

**Τράπεζα θεμάτων 16-2-2023**

**Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ΕΠΑΛ**

**137 Ασκήσεις**



[www.Askisopolis.gr](http://www.Askisopolis.gr)

**Στέλιος Μιχαήλογλου**



## Πραγματικοί αριθμοί

2<sup>ο</sup> Θέμα

**13394.** Έστω  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha\beta = 1$ . (Μονάδες 13)

**β)** Αξιοποιώντας το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι  $(\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = 5$ . (Μονάδες 12)

**13478.** Έστω  $\alpha$  πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει  $\alpha^2 = 4(\alpha - 1)$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $(\alpha - 2)^2 = 0$ . (Μονάδες 13)

**β)** Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ . (Μονάδες 12)

**14644.** Για τους αριθμούς  $2\alpha + 1$  και  $\beta + 1$ , ισχύει ότι  $(2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$ , να δείξετε ότι:

**α)**  $2\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0$ . (Μονάδες 11)

**β)** οι αριθμοί  $x = \alpha(2 + \beta)$  και  $y = \beta(\alpha + 1)$  είναι αντίθετοι. (Μονάδες 14)

**14646.α)** Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$ . (Μονάδες 12)

**β)** Αν  $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$  να δείξετε ότι  $\alpha = \beta$ . (Μονάδες 13)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**14350.** Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 3x - 2y - 2$  και  $\beta = y - 1 - 2x$  και η παράσταση  $A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6}$ .

**α)** Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $x$  για τις οποίες ορίζεται η παράσταση  $A$ . (Μονάδες 5)

**β)** Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αντίθετοι τότε:

**i.** Να δείξετε ότι  $x - y = 3$ . (Μονάδες 10)

**ii.** Να δείξετε ότι η παράσταση  $A = 1$  (Μονάδες 10)

**14462.** Έστω  $\alpha, \beta$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) = -2\alpha\beta$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)$  **ii.**  $\alpha + \beta = 2$ . (Μονάδες 8+6=14)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $(2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \alpha\beta$ . (Μονάδες 11)

**14631.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha + \gamma = 10 \text{ και } (\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma.$$

**α)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$ . (Μονάδες 7)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να αποδείξετε ότι  $(2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = 100$ . (Μονάδες 10)

## Διάταξη πραγματικών αριθμών

2<sup>ο</sup> Θέμα

**14309.** Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό  $y$  για τον οποίο ισχύει η ανισότητα  $2 < y < 3$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι  $4 < 2y < 6$ . (Μονάδες 7)  
**β)** Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις  
**i.**  $2y + 3$  (Μονάδες 9)      **ii.**  $2y - 5$  (Μονάδες 9)

**14405.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, \beta$  ισχύουν  $a < \beta$  και  $\beta < \gamma$  να αποδείξετε ότι:

- α)**  $a - \gamma < 0$ . (Μονάδες 12)      **β)**  $(a - \beta)(a - \gamma) > 0$ . (Μονάδες 13)

**14776.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $a, \beta$  για τους οποίους ισχύει  $a > 1, \beta < 1$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $(a - 1)(\beta - 1) < 0$ . (Μονάδες 15)  
**β)** Με χρήση του **α)** ή με οποιονδήποτε τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι  $a\beta + 1 < a + \beta$ . (Μονάδες 10)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**14487.** Δίνεται η παράσταση  $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$ .

- α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται παράσταση  $A$ . (Μονάδες 8)  
**β)** Να αποδείξετε ότι  $A = -5$ . (Μονάδες 7)  
**γ)** Να αποδείξετε ότι  $\frac{5}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}} - \frac{5}{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$ . (Μονάδες 10)

**14540.** Θεωρούμε πραγματικούς τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  για τους οποίους ισχύουν οι ανισότητες  $0 < x < 2$  και  $0 < y < 3$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι  $0 < x + y < 5$ . (Μονάδες 10)  
**β)** Να βρείτε μεταξύ ποιων πραγματικών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:  
**i)**  $-3y$  (Μονάδες 7)      **ii)**  $x - 2y$  (Μονάδες 8)

## Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

2<sup>ο</sup> Θέμα

**14400.** Δίνεται η παράσταση  $A = |x - 3|$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A$  σε κάθε μια από τις τρεις επόμενες περιπτώσεις:

i)  $x = 4$  (Μονάδες 4)      ii)  $x = 3$  (Μονάδες 4)      iii)  $x = 2$ . (Μονάδες 4)

β) Αν  $x < 3$  να γράψετε την τιμή της παράστασης  $A$  χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής. (Μονάδες 13)

**14777.** Δίνεται ο πραγματικός αριθμός  $a$  για τον οποίο ισχύει ότι  $1 < a < 3$ .

α) Να δείξετε ότι  $|a - 1| = a - 1$  και  $|a - 3| = 3 - a$ . (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι  $|a - 1| + |a - 3| = 2$ . (Μονάδες 10)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**14873.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $a, \beta$ , για τους οποίους ισχύει  $2 \leq a \leq 3$  και  $-2 \leq \beta \leq -1$ .

α) Να δείξετε ότι:  $a - 3 \leq 0$  και  $\beta + 2 \geq 0$ . (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι:  $3 \leq a - \beta \leq 5$ . (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι  $|a - \beta| + |a - 3| + |\beta + 2| = 5$ . (Μονάδες 9)

## Ρίζες πραγματικών αριθμών

2<sup>ο</sup> Θέμα

**14715.** Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 1 - \sqrt{2}$  και  $\beta = 2 + \sqrt{2}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta = 3$  και  $\alpha\beta = -\sqrt{2}$ . (Μονάδες 12)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 4$ . (Μονάδες 13)

**14775. α)** Να αποδείξετε ότι  $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ . (Μονάδες 13)

**β)** Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να δείξετε ότι:  $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$ . (Μονάδες 12)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**14299. α) i.** Να υπολογίσετε τη δύναμη  $2^{\frac{6}{3}}$ . (Μονάδες 5)

**ii.** Να αιτιολογήσετε την ισότητα  $(\sqrt{2})^6 = 8$ . (Μονάδες 3)

**iii.** Να υπολογίσετε τη δύναμη  $(\sqrt[3]{2})^6$ . (Μονάδες 7)

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2})^6$ . (Μονάδες 10)

Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού2<sup>ο</sup> Θέμα

**13398.** Δίνεται η εξίσωση  $|x - 5| = 6$  (I)

**α)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $-1$  είναι λύση της (I).

(Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (I).

(Μονάδες 15)

**13405.α)** Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $|x + 8| = 10$  επαληθεύεται για  $x=2$ ,  $x=0$  και  $x=-10$ .

(Μονάδες 13)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x + 8| = 10$ .

(Μονάδες 12)

**13450.α)** Να ελέγξετε αν ο αριθμός 6 είναι λύση της εξίσωσης  $|x - 9| = 3$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 9| = 3$ .

(Μονάδες 15)

**13455.α)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = |x + 1|$  για  $x = -2$  και για  $x = 1$ .

(Μονάδες 13)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x + 1| = 2$ .

(Μονάδες 12)

**14196.** Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:  $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta + 1}{6}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $2\alpha = \beta + 1$ .

(Μονάδες 12)

**β)** Αν  $\beta = -3$  να βρείτε τον  $\alpha$ .

(Μονάδες 13)

**14296.α)** Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $|x - 2| = 7$  επαληθεύεται για  $x = 1$ ,  $x = 2$  και  $x = -3$ .

(Μονάδες 12)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 2| = 7$ .

(Μονάδες 13)

**14308.α)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = |x - 2|$

**i.** για  $x = 0$ .

(Μονάδες 5)

**ii.** για  $x = -4$ .

(Μονάδες 5)

**iii.** για  $x = 5$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 2| = 3$

(Μονάδες 10)

**14330.α)** Να λύσετε την εξίσωση:  $x - 5 = 10$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση:  $|x - 5| = 10$ .

(Μονάδες 15)

**14376.** Δίνονται οι παραστάσεις  $A = \frac{3x - 1}{5}$  και  $B = \frac{1 - 2x}{3}$ .

**α)** Να λύσετε την εξίσωση  $A = 0$ .

(Μονάδες 12)

**β)** Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων  $A$  και  $B$  είναι αντίθετες.

(Μονάδες 13)

**14755.** Δίνεται η παράσταση:  $A = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$ .

**α)** Να δείξετε ότι  $A = x + 1$ ,  $x \neq 1$ .

(Μονάδες 7)

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A$  για  $x = 3^0 - 1$ .

(Μονάδες 9)

**γ)** Μπορεί η παράσταση  $A$  να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

**14766.α)** Να γράψετε με τη μορφή εξίσωσης την εξής πρόταση: «Η απόσταση των αριθμών  $x$  και  $-9$  πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 17».

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε αλγεβρικά ή γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, όλους τους αριθμούς  $x$  που ικανοποιούν την παραπάνω πρόταση. (Μονάδες 13)

#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**14737.** Δίνεται η παράσταση  $K = |x - 2| + 1$ .

- α) Να γράψετε την παράσταση  $K$  χωρίς απόλυτη τιμή. (Μονάδες 7)  
β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x$ , οι οποίοι έχουν απόσταση από το 2 ίση με 4. (Μονάδες 6)  
γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $K$  για τους αριθμούς  $x$  του ερωτήματος β. (Μονάδες 6)  
δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $x$ , ώστε  $K=0,99$ . (Μονάδες 6)

**14305.** Δίνονται οι παραστάσεις  $A = x^2 + 6x + 9$  και  $B = (4y - 2)^2$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $A = (x + 3)^2$ . (Μονάδες 8)  
β) i. Να δείξετε ότι  $A + B \geq 0$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 9)  
ii. Για ποιες τιμές των  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει  $A + B = 0$ ; (Μονάδες 8)



Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού2<sup>ο</sup> Θέμα

**13505.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

- α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 - 3x + 2$  είναι  $\Delta = 1$ . (Μονάδες 8)  
 β) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση; (Μονάδες 8)  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 9)

**13411.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 4x + 4 = 0$  (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα  $\Delta = 0$ . (Μονάδες 12)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

**13451.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 5x + 4 = 0$  (1).

- α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 4 επαληθεύει την εξίσωση (1). (Μονάδες 8)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 17)

**14297.α)** Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς: 8, -4 και -8 και είναι λύση της εξίσωσης  $x^2 = 16$ .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 = 16$ .

(Μονάδες 13)

**14381.** Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει δυο ρίζες, τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 1$ .

- α) i. Να γράψετε το άθροισμα S των ριζών της εξίσωσης. (Μονάδες 5)  
 ii. Να γράψετε το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης. (Μονάδες 5)  
 β) Να γράψετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 1$ . (Μονάδες 15)

**14460.** Δίνονται οι αριθμοί  $x_1 = 2 + \sqrt{3}$  και  $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ .

- α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $S = x_1 + x_2$  και να αποδείξετε ότι για το γινόμενο  $P = x_1 x_2$  ισχύει  $P = 1$ . (Μονάδες 14)  
 β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$ . (Μονάδες 11)

**14539.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 7x + 6 = 0$  (1).

- α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 επαληθεύει την εξίσωση (1). (Μονάδες 10)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 15)

**14647.α)** Να λύσετε την εξίσωση  $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$ . (Μονάδες 13)

- β) Αν οι λύσεις του ερωτήματος α) είναι  $\omega_1 = 1$  και  $\omega_2 = 3$ , να εξετάσετε για ποια από αυτές τις τιμές του  $\omega$ , η εξίσωση  $(\omega^2 - 4\omega + 3)x = \omega - 1$ , είναι αδύνατη. (Μονάδες 12)

**14824.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 3x - 4 = 0$  (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, υπολογίζοντας την διακρίνουσα της. (Μονάδες 10)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 15)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**14192.** Δίνεται το τριώνυμο  $3x^2 - x - 5$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο αυτό έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)  
 β) Να βρείτε τις ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 9)  
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών αυτών. (Μονάδες 8)

**14542.α)** Να λύσετε τις εξισώσεις

- i)  $3x - 3 = 0$  (Μονάδες 6)      ii)  $x^2 - 4x + 4 = 0$  (Μονάδες 6)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση  $(3x - 3)(x - 2)^2 = 0$ . (Μονάδες 13)

**14717.α)** Έστω  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει  $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$  και  $\alpha\beta = 1$ .

- i. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ . (Μονάδες 5)  
 ii. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ . (Μονάδες 8)  
 β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε να ισχύει  $\alpha + \beta = 1$  και  $\alpha\beta = \frac{5}{2}$ . (Μονάδες 12)

**14769.** Σε ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου η πρόσοψη (η πλευρά προς το δρόμο) είναι κατά 5m μεγαλύτερη από το βάθος (πλάτος) του. Αν το βάθος του οικοπέδου είναι  $x$  μέτρα, τότε:

α) Να εκφράσετε σε σχέση με το  $x$ , την περίμετρο και το εμβαδόν του οικοπέδου. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος  $\Pi$  και το εμβαδόν  $E$  δίνονται από τις σχέσεις  $\Pi = 4x + 10$  m και  $E = x(x + 5)$  m<sup>2</sup> αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις

διαστάσεις του οικοπέδου όταν:

- i. Η περίμετρος του είναι 70m. (Μονάδες 6)  
 ii. Το εμβαδόν είναι 150m<sup>2</sup>. (Μονάδες 9)



### 3<sup>ο</sup> Θέμα

**14739.** Μία εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1 = 4$  και  $x_2 = 3$ .

- α) Να γράψετε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τις  $x_1, x_2$ . (Μονάδες 12)  
 β) Αν η εξίσωση δευτέρου βαθμού της μορφής  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει ρίζες τις  $x_1, x_2$  που δίνονται παραπάνω και  $\alpha = 2$ , να βρείτε τους συντελεστές  $\beta$  και  $\gamma$ . (Μονάδες 13)

Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού2<sup>ο</sup> Θέμα

**14316.** Δίνεται η παράσταση  $A = (x+1)^2 - (x-1)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει  $A = 4x$ . (Μονάδες 12)

**β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η παράσταση  $A$  είναι μεγαλύτερη από το  $\frac{1}{4}$ . (Μονάδες 13)

**14317.** Δίνονται οι ανισώσεις:  $2(x-1) < x+4$  και  $2-(5-x) > 0$ .

**α)** Να τις λύσετε. (Μονάδες 16)

**β)** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις και των δυο ανισώσεων.

(Μονάδες 9)

**14557.** Δίνεται η ανίσωση  $3x - 7 \geq 5x + 11$  (I).

**α)** Να λύσετε την ανίσωση (I). (Μονάδες 15)

**β)** Να γράψετε τις λύσεις της (I) με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 10)

**14738.α)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x| = 1$  (1). (Μονάδες 12)

**β)** Να λυθεί η ανίσωση  $|6x| \leq 6$  (2). (Μονάδες 13)

**14828.α)** Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$ , ισχύει:  $(x+3)^2 - (x+1)^2 = 4(x+2)$ .

(Μονάδες 13)

**β)** Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε την ανίσωση  $(x+3)^2 - (x+1)^2 > 0$ . (Μονάδες 12)

**14850.α)** Να λύσετε την ανίσωση  $|x| \leq 5$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x - 7 \geq -4(x - 2)$ . (Μονάδες 10)

**γ)** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 7)

**14921.** Δίνονται οι ανισώσεις:  $x - 1 > 1$  (1) και  $2x - 3 < 5$  (2).

**α)** Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 8)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση (2). (Μονάδες 8)

**γ)** Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 9)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**13414.α)** Να λύσετε την ανίσωση  $|3x - 6| < 15$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $|x - 6| \geq 1$  και να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή

διαστήματος. (Μονάδες 12)

**γ)** Να παραστήσετε (σχεδιάζοντας) τις λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) σε έναν άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 5)

**13506.** Δίνονται οι ανισώσεις:  $3(x-1) > x+3$  (1) και  $|x| \leq 4$  (2)

**α)** Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 8)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση (2). (Μονάδες 9)

**γ)** Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 8)

**13402.** Δίνονται οι ανισώσεις  $|x| \leq 9$  (I) και  $7x - 8 \geq -3(x - 4)$  (II).

- α) Να λύσετε την ανίσωση (I). (Μονάδες 7)  
 β) Να λύσετε την ανίσωση (II). (Μονάδες 10)  
 γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (I) και (II) στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 8)

**13457.** Δίνονται οι ανισώσεις:  $|x| < 4$  (1) και  $4(x - 1) > 6x - 8$  (2).

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 10)  
 β) Να λύσετε την ανίσωση (2). (Μονάδες 10)  
 γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 5)

**14298.** Για τον πραγματικό αριθμό  $a$ , δίνεται ότι  $a < -2$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $2a + 4 < 0$ . (Μονάδες 8)  
 β) Να γράψετε την παράσταση  $A = |2a + 4| + 3|3a + 6|$  χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής. (Μονάδες 8)  
 γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $A > -11$ . (Μονάδες 9)

**14401.α)** Να λύσετε την ανίσωση  $|x - 2| < 1$ . (Μονάδες 9)

β) Αν  $|x - 2| < 1$  να δείξετε ότι  $3 < 2x + 1 < 7$ . (Μονάδες 8)

γ) Αν  $1 < x < 3$  να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = |x - 1| + |x - 3|$ . (Μονάδες 8)

**14541.α)** Να λύσετε την ανίσωση  $|x| \geq 4$ . (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση  $3(|x| + 2) + 1 < 22$ . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β). (Μονάδες 8)

**14874.** Για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύουν  $d(x, 1) \leq 2$  (1),  $d(x, 4) \geq 3$  (2).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 5)

γ) Για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

i. να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι  $|x - 1| + |x + 1| = 2$ . (Μονάδες 5)

ii. να δείξετε αλγεβρικά ότι  $|x - 1| + |x + 1| = 2$ . (Μονάδες 5)

**14875.** Για του πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύουν αντίστοιχα  $d(x, 2) \leq 1$  (1)  $d(y, 4) \leq 3$  (2).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 10)

β) Αν  $1 \leq x \leq 3$  και  $1 \leq y \leq 7$  να δείξετε ότι:

i. η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις  $x, y$  είναι τουλάχιστον 4 και το πολύ 20. (Μονάδες 7)

ii.  $|x - y| \leq 6$ . (Μονάδες 8)

## Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

**13558.** Δίνεται το τριώνυμο  $2x^2 - 6x + 4$ .

- α)** Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2. (Μονάδες 12)  
**β)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $2x^2 - 6x + 4$ . (Μονάδες 13)

**14194.α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 + 3x - 4 = 0$  έχει ρίζες  $x_1 = -4$  και  $x_2 = 1$ . (Μονάδες 13)

- β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + 3x - 4 < 0$ . (Μονάδες 12)

**14663.** Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 3x + 2$ .

- α)** Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 8)  
**β)** Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - 3x + 2$  είναι οι αριθμοί 1 και 2 και να βρείτε το πρόσημό του. (Μονάδες 9)  
**γ)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ . (Μονάδες 8)

**14736.α)** Να λυθεί η εξίσωση  $x^2 - 3x + 2 = 0$  (1).

(Μονάδες 12)

**β)** Να λυθεί η ανίσωση  $x^2 - 3x \geq -2$  (2).

(Μονάδες 13)

**14778.α)** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - 4x + 3$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 4x + 3 < 0$ .

(Μονάδες 15)

### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**13413.α)** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 7x + 6 = 0$ .

(Μονάδες 8)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ . Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

**γ)** Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης που λύσατε στο ερώτημα (β). (Μονάδες 5)

**13401.α)** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - x - 12$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση  $x^2 - x - 12 \leq 0$ . (Μονάδες 9)

**γ)** Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης  $x^2 - x - 12 \leq 0$ . (Μονάδες 6)

**13452.** Δίνονται οι ανισώσεις  $3(2x+1)+6 < 21$  (1) και  $x^2 - 2x - 3 \leq 0$  (2).

**α)** Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 8)

**β) i.** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . (Μονάδες 5)

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση (2). (Μονάδες 5)

**γ)** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

**13477.** Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 3x + 2$ .

**α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 7)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 3x + 2 > 0$ . (Μονάδες 10)

**γ)** Να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$  και  $\alpha_2 = \frac{3}{2}$  είναι λύσεις της ανίσωσης του β ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

**13559.** Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 7x + 12$ .

**α)** Να δείξετε ότι το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4. (Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 7x + 12 < 0$ . (Μονάδες 10)

**γ)** Για τον πραγματικό αριθμό  $\pi = 3,1415\dots$  να δείξετε ότι ισχύει  $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$ . (Μονάδες 5)

- 14198.α)** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - x - 12$  (1). (Μονάδες 8)
- β)** Αν οι ρίζες του τριωνύμου (1) είναι  $x_1 = 3$  και  $x_2 = -4$ , να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - x - 12 < 0$  και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)
- γ)** Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β). (Μονάδες 5)
- 14404.α)** Αν  $x^2 - 7x + 10 < 0$ , να αποδείξετε ότι  $2 < x < 5$ . (Μονάδες 8)
- β)** Να λύσετε την ανίσωση  $3x - 2 < x + 4$ . (Μονάδες 9)
- γ)** Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις. (Μονάδες 8)
- 14488.** Έστω  $\Omega$  το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.
- α)** Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο  $\Omega$ . (Μονάδες 7)
- β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - x - 12 < 0$  (1). (Μονάδες 10)
- γ)** Ποια από τα στοιχεία του συνόλου  $\Omega$  ανήκουν στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1); (Μονάδες 8)
- 14514.α)** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 2x + 7 = 0$ . (Μονάδες 8)
- β)** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου  $x^2 - 2x + 7$  για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 10)
- γ)** Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικό αριθμό αυξημένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του διπλάσιου του. (Μονάδες 7)
- 14671.α)** Να λύσετε την ανίσωση  $4(x - 2) > 5(2x + 8)$ . (Μονάδες 8)
- β)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + 9x < 0$ . (Μονάδες 12)
- γ)** Να παραστήσετε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις (αν υπάρχουν). (Μονάδες 5)

## Αριθμητική πρόοδος

### 2ο θέμα

**13412.** Θεωρούμε τους αριθμούς 2, 4, 6, ... που συνεχίζονται, προσθέτοντας κάθε φορά το 2.

- α) i)** Ποιος είναι ο επόμενος αριθμός; (Μονάδες 5)  
**ii)** Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια η διαφορά  $\omega$  της προόδου αυτής; (Μονάδες 10)  
**β)** Ο αριθμός 2 είναι ο 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος. Να βρεθεί ο 8ος όρος της προόδου αυτής. (Μονάδες 10)

**13399.** Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο 5, 9, 13, 17, .....

- α)** Ποια είναι η διαφορά  $\omega$  αυτής της αριθμητικής προόδου; (Μονάδες 10)  
**β)** Να βρείτε τον 51<sup>ο</sup> όρο της προόδου. (Μονάδες 15)

**14191.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με πρώτους όρους τους - 4, - 1, 2, 5, 8, .....

- α)** Να αποδείξετε ότι ο γενικός όρος αυτής της προόδου δίνεται από τη σχέση  $a_n = 3n - 7$ , όπου  $n = 1, 2, 3, \dots$  (Μονάδες 13)  
**β)** Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 12)

**14195.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_1 = 2$  και  $a_2 = 5$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι  $\omega = 3$ . (Μονάδες 12)  
**β)** Να αποδείξετε ότι  $a_{20} = 59$ . (Μονάδες 13)

**14513.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_2 = 8$  και  $\omega = 2$ .

- α)** Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι  $a_1 = 6$ . (Μονάδες 7)  
**β)** Να υπολογίσετε τον 7ο όρο  $a_7$  της προόδου. (Μονάδες 9)  
**γ)** Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 9)

**14630.** Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει  $a_3 = 18$  και  $a_4 = 26$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι για τη διαφορά  $\omega$  της προόδου ισχύει  $\omega = 8$ . (Μονάδες 8)  
**β)** Να βρείτε τους δυο πρώτους όρους της. (Μονάδες 8)  
**γ)** Να αποδείξετε ότι  $a_{37} = 290$ . (Μονάδες 9)

**14659.** Θεωρούμε τους αριθμούς -12, -6, 0, ... που συνεχίζονται προσθέτοντας κάθε φορά το 6.

- α) i)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)  
**ii)** Να βρείτε τους δύο επόμενους όρους της προόδου αυτής. (Μονάδες 10)  
**β)** Αν ο -12 είναι 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της ( προόδου αυτής) είναι ίσο με 0. (Μονάδες 10)

**14735.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_1 = -4$  και  $\omega = 7$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι ο 2ος όρος της προόδου είναι  $a_2 = 3$ . (Μονάδες 12)  
**β)** Να υπολογίσετε τον 5ο όρο  $a_5$  της προόδου. (Μονάδες 13)

**14965.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 4, 8, 12, ...

- α)** Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι  $\omega = 4$ . (Μονάδες 7)  
**β)** Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου. (Μονάδες 9)  
**γ)** Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 9)

## 4ο θέμα

**13403.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_4 = 7$  και  $a_5 = 9$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά  $\omega$  της αριθμητικής προόδου είναι  $\omega = 2$ . (Μονάδες 5)  
 β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 10)  
 γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο 36. (Μονάδες 10)

**13407.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 7$  και διαφορά  $\omega$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\omega = 3$ . (Μονάδες 6)  
 β) Να αποδείξετε ότι ο  $n$ -οστός όρος της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  είναι ίσος με  $a_n = 3n - 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και να βρείτε τον 6ο όρο της προόδου. (Μονάδες 12)  
 γ) Υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  που να ισούται με 21; (Μονάδες 7)

**13453.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  της οποίας ο 4ος όρος είναι ο  $a_4 = 10$  και ο 5ος όρος είναι ο  $a_5 = 7$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου  $(a_n)$  είναι  $\omega = -3$  και να βρείτε τον 1ο όρο της προόδου  $a_1$ . (Μονάδες 15)  
 β) Να βρείτε τον 8ο όρο της προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 10)

**13456.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_3 = 10$  και  $a_5 = 18$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά  $\omega$  της προόδου είναι  $\omega = 4$  και ότι ο πρώτος όρος της είναι  $a_1 = 2$ . (Μονάδες 13)  
 β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα  $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 32. (Μονάδες 12)

**14310.α)** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 9 = 0$ . (Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $2x(x^2 - 9) = 0$ . (Μονάδες 10)

γ) Να διατάξετε τις ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

**14311.α)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο 12. (Μονάδες 7)

**β)** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  για την οποία ισχύει ότι  $a_3 = 8$  και  $a_5 = 16$ .

**i.** Να βρείτε τον 4ο όρο  $a_4$  και τη διαφορά  $\omega$  της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 10)

**ii.** Να βρείτε τον 1ο όρο  $a_1$  της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 8)

**14648.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με γενικό όρο  $a_n = 4n - 2$ .

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο  $a_1$  και τη διαφορά  $\omega$  της προόδου. (Μονάδες 9)

β) Αν  $a_1 = 2$  και  $\omega = 4$ , να βρείτε τον πρώτο όρο της  $(a_n)$  που είναι μεγαλύτερος του 120. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα  $S_{30}$  των 30 πρώτων όρων της προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 7)

**14664.** Δίνεται αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  της οποίας ο 1ος όρος είναι  $a_1 = 3$ , ενώ ο 10ος όρος είναι  $a_{10} = 21$ .

α) Να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 8)

Για  $\omega = 2$

β) Να βρείτε το άθροισμα  $S_{10}$  των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ . (Μονάδες 8)



γ) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να ισούται με 168. (Δίνεται  $\sqrt{676} = 26$ ). (Μονάδες 9)

**14757.** Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Στο τέλος του πρώτου μήνα είχαν κατασκευαστεί 5 τέτοια οχήματα, στο τέλος του δεύτερου μήνα 18, στο τέλος του τρίτου μήνα 31 κ.ο.κ.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα στο τέλος του τέταρτου, του πέμπτου και του έκτου μήνα; (Μονάδες 6)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 6)
- γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τον πρώτο χρόνο; (Μονάδες 6)
- δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250<sup>ο</sup> αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

**14818.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 4, 8, 12, ...

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι  $\omega = 4$ . (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της. (Μονάδες 6)
- γ) **i.** Να δείξετε ότι το πλήθος  $n$  των πρώτων όρων της παραπάνω προόδου που έχουν άθροισμα ίσο με 480 είναι λύση της εξίσωσης  $n^2 + n - 240 = 0$ . (Μονάδες 7)
- ii.** Να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων της που έχουν άθροισμα τουλάχιστον 480. (Δίνεται  $\sqrt{961} = 31$ ) (Μονάδες 7)

**14923.** Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ , δηλαδή το κόστος για έναν καλεσμένο είναι  $a_1$ , για δυο καλεσμένους είναι  $a_2$ , ..., για πενήντα καλεσμένους  $a_{50}$ , ..., για εκατό καλεσμένους  $a_{100}$ , κ.ο.κ.

- α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι  $a_1 = 1317$  και η διαφορά  $\omega = 107$ . (Μονάδες 9)
- β) Να δείξετε ότι το κόστος για  $n$  καλεσμένους είναι  $a_n = 107n + 1210$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 85 καλεσμένους. (Μονάδες 7)

## Γεωμετρική πρόοδος

## 2ο θέμα

**13406.α)** Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί 1, 2, 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.  
(Μονάδες 15)

**β)** Να βρείτε το  $x$  ώστε οι πραγματικοί αριθμοί 1,  $x$ , 4 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.  
(Μονάδες 10)

**14304.α)** Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί - 3, 9, - 27 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.  
(Μονάδες 15)

**β)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $x$  ώστε οι πραγματικοί αριθμοί 9,  $x$ , 81 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.  
(Μονάδες 10)

**14709.** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος  $(a_n)$  με πρώτους όρους τους 1, 3, 9,...

**α)** Να βρείτε τον τέταρτο όρο  $a_4$  της προόδου  $(a_n)$ .  
(Μονάδες 10)

**β)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της  $(a_n)$  είναι:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 121$ .  
(Μονάδες 15)

**14872.** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_2 = 8$  και  $\lambda = 2$ .

**α)** Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι  $a_1 = 4$ .  
(Μονάδες 7)

**β)** Να υπολογίσετε τον 7ο όρο  $a_7$  της προόδου.  
(Μονάδες 9)

**γ)** Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου  $(a_n)$ .  
(Μονάδες 9)

**14889.** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: 4, 8, 16, 32, ....

**α)** Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι  $\lambda = 2$ .  
(Μονάδες 12)

**β)** Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.  
(Μονάδες 6)

**γ)** Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.  
(Μονάδες 7)

## 4ο θέμα

**14199.** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_3 = -8$  και  $a_6 = -64$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι ο λόγος είναι  $\lambda = 2$  και ο πρώτος όρος  $a_1 = -2$ .  
(Μονάδες 15)

**β)** Να αποδείξετε ότι:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -62$ .  
(Μονάδες 10)

**14558.α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών  $\frac{8}{x}$  και  $32x$  είναι ο αριθμός 16, όπου  $x$  τυχαίος πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν.  
(Μονάδες 9)

**β)** Οι αριθμοί  $\frac{8}{x}$ , 16,  $32x$  με αυτή τη σειρά, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου  $(a_n)$ , με λόγο  $\lambda = 4$ .

**(i)** Να αποδείξετε ότι  $x = 2$ .  
(Μονάδες 8)

**(ii)** Να αποδείξετε ότι ο  $n$ -στός όρος αυτής της προόδου είναι  $a_n = 2^{2n}$ , όπου  $n$  θετικός ακέραιος.  
(Μονάδες 8)

**14922.** Οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, είναι:

$$k-1, 6 \text{ και } 3k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$

**α)** Να βρείτε τις δυνατές τιμές του  $k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ .  
(Μονάδες 8)

**β)** Για  $k = 4$ , να βρείτε  
**i.** τον τέταρτο όρο της προόδου.  
(Μονάδες 8)

**ii.** τον πρώτο όρο της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό  $3 \cdot 2^8$ .  
(Μονάδες 9)

## Η έννοια της συνάρτησης

### 2ο θέμα

**13395.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς  $f(-2)$  και  $f(1)$  είναι μεγαλύτερος. (Μονάδες 12)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = f(1)$ . (Μονάδες 13)

**14193.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε το  $f(2)$ . (Μονάδες 12)  
 β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \geq 7$  και να γράψετε τη λύση της σε διάστημα. (Μονάδες 13)

**14658.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 4$ .

- α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς  $f(-2)$  και  $f(1)$  είναι μεγαλύτερος. (Μονάδες 12)  
 β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = f(1)$ . (Μονάδες 13)

**14700.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ .

- α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης  $f(0)$  και  $f(-1)$ . (Μονάδες 12)  
 β) Για  $x < 0$  να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) \leq 2$ . (Μονάδες 13)

**14780.** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης  $x \rightarrow y$  με το  $x$  να παίρνει μόνο τις τιμές:  $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$  και  $3$ .

$x$	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$y$	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση  $x \rightarrow y$  είναι συνάρτηση. (Μονάδες 12)  
 β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

**14871.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  με  $x \neq 2$ .

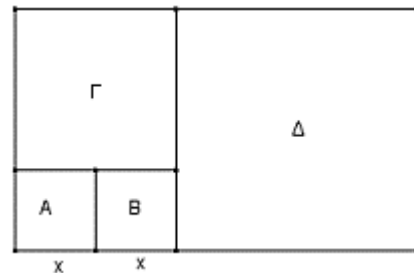
- α) Να δείξετε ότι  $f(x) = x + 2$  με  $x \neq 2$ . (Μονάδες 12)  
 β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \leq 4$ . (Μονάδες 13)

### 4ο θέμα

**13397.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = |x - 3| + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τις τιμές  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ . (Μονάδες 9)  
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση  $f(x) = 3$  δεν έχει λύση. (Μονάδες 6)  
 γ) Έστω  $x \geq 3$ .  
 i. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x + 1$ . (Μονάδες 5)  
 ii. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x^2}{16} + x = f(x)$ . (Μονάδες 5)

- 14331.α)** Να αποδείξετε ότι  $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ . (Μονάδες 7)
- β)** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ .
- i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 7)
- ii)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x - 2$ , για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 6)
- iii)** Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του πραγματικού αριθμού  $x$ , για την οποία  $f(x) = -1$ . (Μονάδες 5)
- 14632.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = |x - 2| + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- α)** Να βρείτε την τιμή της όταν  $x = 2$  και όταν  $x = -3$ . (Μονάδες 10)
- β)** Έστω  $x > 2$ .
- i.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2(x - 1)$ . (Μονάδες 8)
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = (x - 2)(x - 1)$ . (Μονάδες 7)
- 14705.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = |2x - 5| + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- α)** Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$ ,  $f(3)$  και  $f\left(\frac{5}{2}\right)$ . (Μονάδες 9)
- β)** Να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση. (Μονάδες 6)
- γ)** Έστω  $x \geq \frac{5}{2}$ .
- i.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2x - 1$ . (Μονάδες 5)
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x^2}{5} + x = f(x)$ . (Μονάδες 5)
- 14716.** Θεωρούμε το τριώνυμο  $x^2 - 5x + 6$  και τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$ .
- α)** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και να το παραγοντοποιήσετε. (Μονάδες 10)
- β)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in A$  ο παραπάνω τύπος της συνάρτησης γράφεται  $f(x) = \frac{x}{x - 3}$ . (Μονάδες 9)
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 4$ . (Μονάδες 6)
- 14807.** Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ . Αν καθένα από τα  $A$ ,  $B$  έχει πλευρά ίση με  $x$ ,  $x > 0$  τότε:
- α)** Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του  $E(x)$  ισχύει  $E(x) = 15x^2$  (Μονάδες 5)
- γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού  $x$  το εμβαδόν είναι μικρότερο από 240. (Μονάδες 10)



## Γραφική παράσταση συνάρτησης

## 2ο θέμα

**13500.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 - 1$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε τις τιμές  $f(2)$  και  $f(0)$ .

(Μονάδες 14)

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία  $A(2,7)$  και  $B(0,-1)$  ανήκουν στη γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 11)

**14890.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ , με  $-3,5 \leq x \leq 2,5$ .

**α) i.** Να βρείτε τα σημεία τομής της παραπάνω γραφικής παράστασης με τους άξονες.

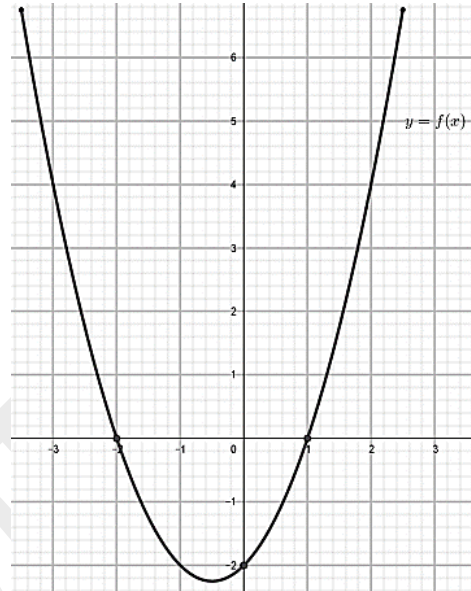
(Μονάδες 6)

**ii.** Για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον  $x'$  άξονα;

(Μονάδες 6)

**β)** Να βρείτε τα σημεία της παραπάνω γραφικής παράστασης που έχουν τεταγμένη  $y = 4$ .

(Μονάδες 13)



## 4ο θέμα

**13462. α)** Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 1| = 4$  (1)

(Μονάδες 10)

**β)** Η εξίσωση  $x^2 - Sx + P = 0$  έχει ίδιες ρίζες με την εξίσωση (1). Να βρείτε τα  $S$  και  $P$ .

(Μονάδες 7)

**γ)** Το σημείο  $A(\rho, 5)$ , όπου  $\rho$  ρίζα της εξίσωσης (1) ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρείτε την τιμή του  $\rho$ .

(Μονάδες 8)

**13396.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $A$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να εξετάσετε αν τα σημεία  $M(3,3)$  και  $N(1,1)$  ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 12)

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

(Μονάδες 8)

**14318.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x + \alpha}{x + 3}$ ,  $x \neq -3$  και  $\alpha$  ένας πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική της

παράσταση διέρχεται από την αρχή  $O(0,0)$ , τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 0$ .

(Μονάδες 5)

Για τη συνέχεια θεωρήσετε ότι  $\alpha = 0$ .

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$ .

(Μονάδες 10)

**γ)** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία  $y = x$ .

(Μονάδες 10)

**14472.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε το  $f(-2)$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(-2,3)$ .

- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 5)
- δ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$ . (Μονάδες 7)
- (Μονάδες 8)

**14816.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = |x - 2| + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$ ,  $f(2)$  και  $f(-2)$ . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) = 7$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2. (Μονάδες 9)

**14768.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 4x - 20$  και  $g(x) = x^2 - 16$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $g$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $g$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες του. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε την τεταγμένη ενός σημείου της γραφικής παράστασης της  $f$ , του οποίου η τεταγμένη είναι  $-24$ . (Μονάδες 7)

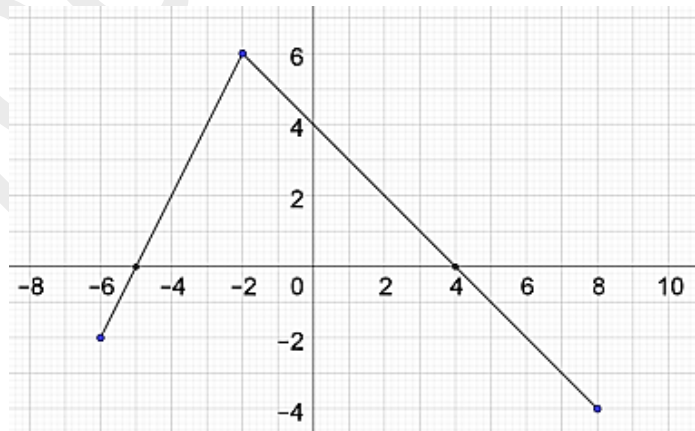
**14817.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$ . Τέμνει η γραφική παράσταση της  $f$  τον  $y'y$  άξονα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
- γ) Να εξετάσετε αν στη γραφική παράσταση της  $f$  υπάρχει σημείο με τεταγμένη 1. (Μονάδες 10)

**14822.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

- α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ . (Μονάδες 5)
- β) να βρείτε τις τιμές  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$ . (Μονάδες 6)
- γ) να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει ότι  $f(x) = 0$ . (Μονάδες 7)
- δ) να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει ότι  $f(x) < 0$ . (Μονάδες 7)



## Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

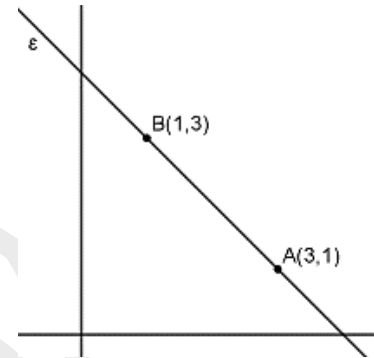
### 2ο θέμα

**14461.** Δίνεται η ευθεία  $y = \frac{4}{3}x - 4$ .

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της A, B με τους άξονες και να την σχεδιάσετε. (Μονάδες 13)  
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 12)

**14643.** Η ευθεία  $\epsilon$  διέρχεται από τα σημεία A(3,1) και B(1,3).

- α) Να δείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon$  έχει κλίση  $\alpha = -1$ . (Μονάδες 12)  
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. (Μονάδες 13)



**14767.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x - 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τους αριθμούς  $f(0)$ ,  $f(3)$ . (Μονάδες 12)  
 β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης. (Μονάδες 13)

### 4ο θέμα

**14197.** Δίνεται η ευθεία  $\epsilon$ :  $y = 2x + 4$ .

- α) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία  $\epsilon$ : A(-1,2), B(6,1), Γ(1,6). (Μονάδες 10)  
 β) Να δείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο Δ(-2,0). (Μονάδες 7)  
 γ) Σχεδιάστε την ευθεία  $\epsilon$  στο καρτεσιανό επίπεδο. (Μονάδες 8)

**14382.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x - 3$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες. (Μονάδες 4)  
 ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο (1,1). (Μονάδες 8)  
 β) i. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  που έχει τεταγμένη 21. (Μονάδες 9)  
 ii. Να παραστήσετε γραφικά την  $f$ . (Μονάδες 4)

**14642.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^2 - 2x$ .

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής A και Α της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 8)  
 β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  και η ευθεία  $\epsilon$ :  $y = -1$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο το Γ(1, -1). (Μονάδες 9)  
 γ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων A, Γ και Β είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου της οποίας να βρείτε τη διαφορά  $\omega$ . (Μονάδες 8)

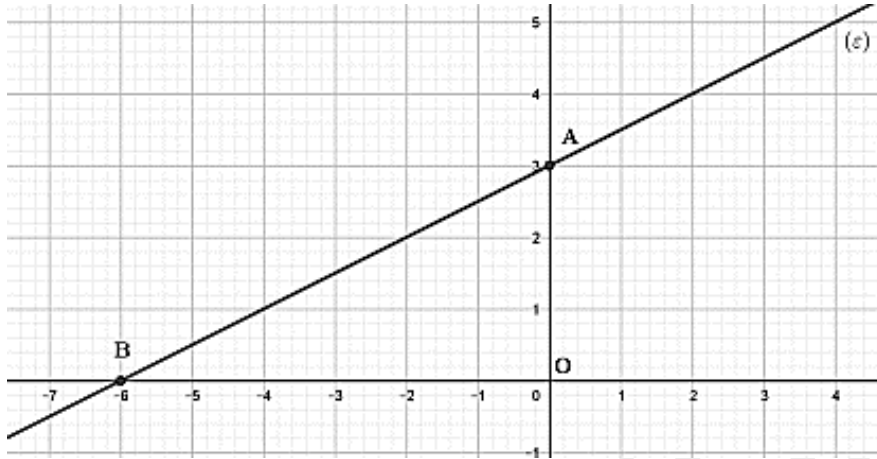
**14657.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 8)  
 β) i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 7)  
 ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ . (Μονάδες 10)

**14708.** Δίνεται ευθεία  $\varepsilon: y = ax + 5$ . Αν η ευθεία  $\delta: y = -3x - 6$  είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ , τότε:

- α) i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας  $\varepsilon$ . (Μονάδες 6)  
**ii.** Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$ ; (Μονάδες 7)  
**β) i.** Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία  $\varepsilon: y = -3x + 5$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ . (Μονάδες 6)  
**iii.** Να σχεδιάσετε την ευθεία. (Μονάδες 6)

**14779.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = ax + \beta$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .



- α)** Να γράψετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A της ευθείας  $(\varepsilon)$  με τον άξονα  $y'y$ . (Μονάδες 8)  
**β)** Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας  $(\varepsilon)$  ισούται με  $\frac{1}{2}$ . (Μονάδες 9)  
**γ)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $a, \beta$  και στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 8)

**14821. α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από τα σημεία  $M(3,6)$  και  $O(0,0)$ . (Μονάδες 8)

**β)** Αν η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  είναι η  $y = 2x$

- i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\eta)$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και διέρχεται από το σημείο  $K(0, 4)$ . (Μονάδες 9)  
**ii.** Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας  $(\eta)$  με τον άξονα  $xx'$ . (Μονάδες 8)